COMITATO NAZIONALE PER L'ENERGIA NUCLEARE
Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-63/5
4.2.1963

P. Giupponi: ABERRAZIONI IN OTTICA DEI MAGNETI A SIMMETRIA DI RIVOLUZIONE (ESTRATTO DALLA TESI DI LAUREA).

Nota interna n. 185

Servizio Documentazione
dei Laboratori Nazionali di Frascati del CNEN
Casella Postale 70 - Frascati (Roma)

Laboratori Nazionali di Frascati del CNEN
Servizio Documentazione

LNF-63/5
4.2.1963

Nota interna: n° 185

P. Giupponi: ABERRAZIONI IN OTTICA DEI MAGNETI A SIMMETRIA DI RIVOLUZIONE (ESTRATTO DALLA TESI DI LAUREA).

INTRODUZIONE.

Lo scopo di questo lavoro, realizzato presso il Servizio Calcoli Numerici dei Laboratori di Frascati, è di studiare il problema delle aberrazioni che si verificano in ottica corpuscolare quando le condizioni dell'approssimazione lineare non sono più soddisfatte. Spesso accade che mentre non si può limitare troppo l'accettanza in angolo ed in energia senza perdere notevolmente l'intensità è poi necessario che il "beam" in uscita abbia piccola dimensione: in tali condizioni la conoscenza dei coefficienti di aberrazione è necessaria per porsi nelle migliori condizioni possibili.

Noi proponiamo un metodo con cui poter studiare l'influsso di tutte le aberrazioni geometriche, ma l'aberrazione cromatica e quella di sfericità sono quelle che sostanzialmente si debbono prendere in considerazione quando si voglia progettare apparecchiature atte a focalizzare fascetti di particelle poco estesi, mentre non si possono trascurare le altre aberrazioni nella progettazione di tubi televisivi e e sopratutto in microscopia elettronica[1].

GENERALITA'.

L'equazione che regola il moto di un elettrone in campo magnetico è l'equazione di Lorentz

$$\frac{d}{dt} m\vec{v} = - e\, \vec{v} \wedge \vec{B} \tag{1}$$

che si può far derivare dal principio variazionale

$$\delta \int_{P_0}^{P_1} L(q_i \,|\, q'_i \,|\, t)\, dt = 0 \tag{2}$$

con

$$L = m_o c^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) - e\, \vec{v}_1\, \vec{A} \tag{3}$$

ove $\vec{A}$ è il potenziale vettore correlato al campo B da

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\, \vec{A}$$

Prendendo un sistema di assi cartesiani ortogonali x, y, z con l'asse z nella direzione del moto e indicando con apice le derivate rispetto a z la (2) può essere posta nella forma[2]

$$\delta W = 0 \tag{4}$$

ed è

$$W = \int_{P_0}^{P_1} F dz. \tag{5}$$

Con F abbiamo indicato tutto l'integrando

$$F = \sqrt{2emU (1+\varepsilon U)(1+x'^2+y'^2)} - e(A_x x' + A_y y' + A_z) \tag{6}$$

che ha le dimensioni di un impulso. ε U rappresenta la correzione relativistica ed è

$$\varepsilon = \frac{e}{2mc^2}.$$

Con U^* rappresentiamo tutta l'espressione $U(1+\varepsilon U)$ e con ciò in assenza di correzione relativistica $U = U^*$.

PROPRIETA' DI W.

L'integrale curvilineo (5) dipende non solo dai punti iniziale e finale, ma dalla particolare curva congiungente P_o a P_1, però in conseguenza della (4) assume il valor massimo per la traiettoria realmente seguita dalla particella. Sia essa la C rappresentata dalle equazioni parametriche

$$x = x(z) \qquad y = y(z) \tag{7}$$

essa deve allora soddisfare le equazioni di Eulero relative al principio variazionale (4), deve essere pertanto:

$$\frac{d}{dz}\frac{\partial F}{\partial x'} - \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \qquad \frac{d}{dz}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{8}$$

Se però valutiamo W lungo una $\bar{C}$ un poco discostata dalla precedente, rappresentata dalle equazioni

$$\bar{x} = x(z) + \delta x(z) \qquad \bar{y} = y(z) + \delta y(z)$$

la variazione subita da W sarà diversa da zero ed uguale a

$$\delta W = W(\bar{c}) - W(c) = \int_{z_o}^{z_2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial x'}\delta x' + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right) d_z$$

a meno di termini di ordine superiore rispetto a δx, δy ecc. [3]. Integrando per parti la precedente espressione tenendo presente che x(z) e y(z) debbono soddisfare la (8) abbiamo

$$\delta W = \left[\frac{\partial F}{\partial x'}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right]_{z_o}^{z_1} = \left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)_{z=z_1}\delta x_1 + \ldots\ldots \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_{z=z_o}\delta y_o$$

Se chiamiamo

$$\sigma_1 = \left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)_{z=z_1} \quad \tau_1 = \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_{z=z_1} \quad \sigma_o = \left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)_{z=z_o} \quad \tau_o = \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_{z=z_o} \tag{9}$$

possiamo scrivere

$$\delta W = \sigma_1 \delta x_1 + \tau_1 \delta y_1 - \sigma_0 \delta x_0 - \tau_0 \delta y_0 \quad . \tag{10}$$

Ma è anche

$$\delta W = W(x_1 + \delta x_1 \ldots) - W(x_1 \ldots) = \frac{\partial W}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial W}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial W}{\partial x_0}\delta x_0 + \frac{\partial W}{\partial y_0}\delta y_0$$

e confrontando tale espressione con la (10) si ha

$$\sigma_1 = \frac{\partial W}{\partial x_1} \quad \tau_1 = \frac{\partial W}{\partial y_1} \quad \sigma_0 = -\frac{\partial W}{\partial x_0} \quad \tau_0 = -\frac{\partial W}{\partial y_0} . \tag{11}$$

Dal momento che x_1 e y_1 sono i valori che assumono nel punto $z = z_1$ le soluzioni di un'equazione differenziale del secondo ordine esse possono essere espresse come funzioni di due condizioni iniziali e così x_0 e y_0 si possono pensare espressi in funzione di condizioni assegnate all'altro estremo. La dipendenza sarà allora del tipo

$$x_0 = x_0(x_1, y_1, \sigma_1, \tau_1) \qquad x_1 = x_1(x_0, y_0, \sigma_0, \tau_0)$$
$$y_0 = y_0(x_1, y_1, \sigma_1, \tau_1) \qquad y_1 = y_1(x_0, y_0, \sigma_0, \tau_0).$$

Differenziando le (11) rispetto a σ_0, τ_0, σ_1, τ_1 per il tramite di x_0, y_0, x_1 ed y_1 otteniamo otto equazioni lineari in $\partial x_0/\partial \sigma_1$, $\partial y_0/\partial \sigma_1$ ecc. e nelle derivate parziali seconde di W: accoppiandole a due a due possiamo ricavare la dipendenza di $\partial x_0/\partial \sigma_1$, $\partial y_0/\partial \sigma_1$, $\partial x_1/\partial \sigma_0$ ecc. in funzione di tale derivate parziali seconde e controntandole otteniamo le relazioni di reciprocità:

$$\frac{\partial x_1}{\partial \sigma_0} = -\frac{\partial x_0}{\partial \sigma_1} \qquad \frac{\partial y_1}{\partial \tau_0} = -\frac{\partial y_0}{\partial \tau_1} \qquad \frac{\partial y_1}{\partial \sigma_0} = -\frac{\partial x_0}{\partial \tau_1}$$
$$\frac{\partial x_1}{\partial \tau_0} = -\frac{\partial y_0}{\partial \sigma_1}. \tag{12}$$

Nell'espressione (6) di F compare il potenziale vettore $\vec{A}$ e se questo è espresso in serie di potenze di x, y, x', y', come accade in pratica, pos siamo spezzare la F nella somma di tante funzioni ognuna delle quali corrisponde a un termine dello sviluppo di $\vec{A}$ ed omogenea nelle variabili suddette. Chiamiamo Fo la parte corrispondente al termine di grado zero (costante) dello sviluppo in serie di A, F_1 quella corrispondente al termine di primo grado, F_2 ecc. Non è detto che tali termini debbano comparire tutti nella espressione di F: anzi nel caso di campi a simmetria di rivoluzione, dei sistemi ortogonali e di lenti quadrupolari la F sarà composta solo di termini di grado pari e per tali sistemi possiamo scrivere:

$$F = F_o + F_2 + F_4 + F_6 \ldots\ldots \tag{13}$$

OTTICA ELETTRONICA AL PRIMO ORDINE.

Prendiamo in considerazione solo i primi due termini dello sviluppo (13) e studiamo il moto dell'elettrone in tale approssimazione. Il principio variazionale(4) in tale ipotesi è

$$\delta \int_{P_o}^{P_1} (F_o + F_2) dz = 0$$

e le equazioni di Eulero relative (dato che F_o = cost.) sono

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial F_2}{\partial x'} - \frac{\partial F_2}{\partial x} = 0 \qquad \frac{d}{dz} \frac{\partial F_2}{\partial y'} - \frac{\partial F_2}{\partial y} = 0 \tag{14}$$

Arrestarsi al secondo termine dello sviluppo di F equivale a considerare solo raggi parassiali e quindi limitarsi a fasci di elettroni la cui distanza dall'asse sia così piccola da poterne trascurare le potenze superiori e la cui inclinazione rispetto all'asse z sia una piccola frazione di radiante così che sin α possa approssimarsi col primo termine dello sviluppo in serie. Tale approssimazione corrisponde alla approssimazione gaussiana in ottica ordinaria e infatti partendo dalla (14) si può costruire un'ottica al primo ordine perfettamente analoga all'ottica geome trica per la luce[9].

ABERRAZIONI AL TERZO ORDINE.

Nelle condizioni in cui si è costretti ad operare con le lenti elettroniche le limitazioni dell'ottica lineare non sono mai rigorosamente verificate e quindi in genere, come per le lenti di vetro, si presentano delle aberrazioni che alterano la qualità delle immagini ottenute. Per studiare l'influsso delle aberrazioni sulla formazione delle immagini bisogna tener conto del termine F_4 dello sviluppo (13), termine che in prima approssimazione è stato trascurato. In tali condizioni le equazioni di Eulero relative al principio variazionale (4) sono:

$$\frac{d}{dz}\frac{\partial(F_2+F_4)}{\partial x'} - \frac{\partial(F_2+F_4)}{\partial x} = 0 \qquad \frac{d}{dz}\frac{\partial(F_2+F_4)}{\partial y'} - \frac{\partial(F_2+F_4)}{\partial y} = 0$$

e si può mostrare facilmente che tali equazioni possono essere poste in una forma in cui F_2 ed F_4 sono separate, cioè:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dz}\frac{\partial F_2}{\partial x'} - \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_4}{\partial x} - \frac{d}{dz}\frac{\partial F_4}{\partial x'}, \\ (15) \qquad & \\ &\frac{d}{dz}\frac{\partial F_2}{\partial y'} - \frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{\partial F_4}{\partial y} - \frac{d}{dz}\frac{\partial F_4}{\partial y'}. \end{aligned}$$

Si vede pertanto che il primo membro delle (15) coincide con le (14) e il secondo invece di essere nullo contiene la derivata lagrangiana di F_4: note allora le soluzioni al primo ordine, quelle al terzo ordine possono venir determinate con il metodo della variazione delle costanti arbitrarie[5]. Tale metodo è stato impiegato da Scherzer[6] per la determinazione della curva di aberrazione relativa a sistemi di lenti magnetiche a simmetria di rivoluzione e in modo semplificato da Grivet e Septier per lenti quadrupolari[7].

Noi vogliamo però servirci del metodo delle perturbazioni per ottenere un procedimento con il quale poter ricavare i punti soluzione del problema variazionale (4) in un piano $z=z_1$ note le soluzioni in prima approssimazione. Si tratterà cioè di trovare le soluzioni del problema variazionale

$$\delta \int_{P_o}^{P_1} (F_o+F_2+F_4)\, dz = 0$$

note le soluzioni della (14) tra P_o e P_1, senza dover risolvere le (15). L'applicazione del metodo perturbativo per la determinazione dei punti soluzione nel piano dell'immagine $z=z_1$ richiede che F_4 possa essere considerata piccola rispetto a $F_o + F_2$ in modo che le soluzioni corrispondenti differiscano per termini del primo ordine almeno rispetto alle soluzioni in prima approssimazione, cioè le soluzioni della (14) sono del tipo:

$$(16) \qquad x^{(1)} = x^{(1)}(x_o, y_o, \sigma_o, \tau_o) \qquad y^{(1)} = y^{(1)}(x_o, y_o, \sigma_o, \tau_o)$$

se ora prendiamo in considerazione anche il termine F_4, le equazioni del moto saranno le (15) la cui soluzione differirà dalle (16); se però calcoliamo W lungo la soluzione al primo ordine e applichiamo la (11) otteniamo

$$\sigma_o^{(1)} + \Delta\sigma_o = - \frac{\partial}{\partial x_o} \int_{z_o}^{z_1} (F_o+F_2+F_4)\, dz$$

$$\tau_o^{(1)} + \Delta\tau_o = - \frac{\partial}{\partial y_o} \int_{z_o}^{z_1} (F_o+F_2+F_4)\, dz$$

e quindi

$$(17) \qquad \Delta\sigma_o = - \frac{\partial}{\partial x_o} \int_{z_o}^{z_1} F_4 dz = - \frac{\partial W_4}{\partial x_o} \qquad \Delta\tau_o = - \frac{\partial W_4}{\partial y_o}$$

con

(18) $$W_4 = \int_{z_o}^{z_1} F_4 \left[x^{(1)},\ y^{(1)},\ x^{(1)\prime},\ y^{(1)\prime},\ z \right] dz;$$

pertanto la traiettoria passante per P_o che tenga conto del termine F_4 sarà espressa da

$$x = x^{(1)}\,(x_o,\ y_o,\ \sigma_o^{(1)} + \Delta\sigma_o,\ \tau_o^{(1)} + \Delta\tau_o)$$
$$y = y^{(1)}\,(x_o,\ y_o,\ \sigma_o^{(1)} + \Delta\sigma_o,\ \tau_o^{(1)} + \Delta\tau_o)\ ;$$

il suo punto di incontro con il piano $z = z_1$ differirà dal punto immagine in prima approssimazione di

$$-\Delta x_1 = \left(\frac{\partial x^{(1)}}{\partial \sigma_o}\Delta\sigma_o + \frac{\partial x^{(1)}}{\partial \tau_o}\Delta\tau_o\right)_{z=z_1} =$$

$$= -\left(\frac{\partial W_4}{\partial x_o}\frac{\partial x_1}{\partial \sigma_o} + \frac{\partial W_4}{\partial y_o}\frac{\partial x_1}{\partial \tau_o}\right) = \left(\frac{\partial W_4}{\partial x_o}\frac{\partial x_o}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial W_4}{\partial y_o}\frac{\partial y_o}{\partial \sigma_1}\right).$$

Per ottenere l'espressione finale si è fatto uso delle (17) e delle (12). Analogamente otteniamo:

$$-\Delta y_1 = \frac{\partial W_4}{\partial x_o}\frac{\partial x_o}{\partial \tau_1} + \frac{\partial W_4}{\partial y_o}\frac{\partial y_o}{\partial \tau_1}\ .$$

W_4 è funzione di x_o, y_o, x_1 ed y_1 ma sostituendo ad x_o ed y_o la loro espressione in funzione di σ_1, τ_1, x_1, y_1 otteniamo una funzione di x_1, y_1, σ_1, τ_1 soltanto e quindi possiamo scrivere al posto delle precedenti relazioni

(19) $$\Delta x_1 = -\frac{\partial W_4}{\partial \sigma_1} \qquad \Delta y_1 = -\frac{\partial W_4}{\partial \tau_1}$$

con σ_1 e τ_1 definiti dalle (9) cioè

(20) $$\sigma_1 = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x'}\right)_{z=z_1} \qquad \tau_1 = \left(\frac{\partial F_2}{\partial y_1}\right)_{z=z_1}.$$

Le (19) rappresentano lo spostamento del punto immagine rispetto a quello determinato in prima approssimazione qualora si prendano in esame i termini del terzo ordine: cioè le (19) ci forniscono con semplici operazioni di derivazione la curva di aberrazione al terzo ordine e risolvono il nostro problema. Pertanto la determinazione della curva di aberrazione richiede la soluzione dell'equazione dei raggi parassiali (14), il calcolo dell'integrale (18) e quindi l'applicazione delle (19).

Nota la soluzione del problema variazionale in approssimazione n-esima tale metodo permette poi di trovare le soluzioni in approssimazione (n+1)-esima ed è allora evidente che applicandolo ripetutamente, una volta nota la soluzione in approssimazione gaussiana, si può trovare la curva di aberrazione di qualsiasi ordine; per gli scopi pratici però basta la determinazione della aberrazione al terzo ordine d'altronde per approssimazioni superiori il calcolo algebrico diventa troppo complicato[8].

OTTICA DEI SISTEMI A SIMMETRIA DI RIVOLUZIONE.

Onde mostrare come tale metodo vada impiegato lo applicheremo al calcolo dei coefficienti di aberrazione per sistema a simmetria di rivoluzione. In tal caso prendendo l'asse z coincidente con l'asse di simmetria del sistema e indicando con $B_z(z)$ il campo magnetico lungo l'asse si ha

$$A(r,z) = \frac{r}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)!} B_z^{(2k)} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k}$$

in cui $A(r,z)$ è la componente circolare del potenziale vettore. E' allora

$$A_x = -A\frac{y}{r} \qquad A_y = A\frac{x}{r} \qquad A_z = 0$$

e quindi la (6) diviene

$$F = \sqrt{2emU^*(1+x'^2+y'^2)} - \frac{e}{2}(xy' - x'y)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)!} B_z^{(2k)} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^{2k}.$$

e il valore dei primi tre termini è pertanto:

$$F_o = \sqrt{2emU^*}$$

$$F_2 = \frac{1}{2} F_o(x'^2 + y'^2) - \frac{e}{2} B_z (xy' - x'y)$$

$$F_4 = -\frac{1}{8} F_o(x'^2+y'^2) + \frac{e}{16} B_7'' (x^2+y^2)(xy' - x'y).$$

Le equazioni parassiali si ottengono esplicitando le (14) e si vede che tali equazioni legano tra di loro le coordinate x ed y e ciò è dovuto alla presenza in F_2 del termine $xy' - x'y$: se allora prendiamo un sistema di assi cartesiani ξ, η, z con l'asse z sovrapposto al precedente e nel quale gli assi ξ ed η ruotano rispetto ad x e y di un angolo θ funzione di z si vede che quando

$$(21) \qquad \theta(z) = \int_{z_o}^{z} \sqrt{\frac{e}{8mU^*}}\, B_z\, dz$$

si ottengono per ξ ed η due equazioni identiche in cui le variabili sono separate, cioè le equazioni del moto dell'elettrone in tale riferimento ruotate sono:

$$(22) \qquad \frac{d^2\xi}{dz^2} + \frac{e}{8mU^*} B_z^2(z)\,\xi = 0 \qquad \frac{d^2\eta}{dz^2} + \frac{e}{8mU^*} B_z^2(z)\,\eta = 0.$$

L'identità e la linearità di tali equazioni ci permette di affermare che elettroni parassiali uscenti con diversa angolazione da uno stesso punto P_o in un piano $z = z_o$ percorrono traiettorie diverse, però esiste un piano $z = z_1$, il piano dell'immagine gaussiana, in cui il fascio di tali traiettorie converge in un sol punto: dato che in tale piano l'ingrandimento I è costante un qualsiasi oggetto nel piano $z=z_o$ dà luogo a una immagine somigliante nel piano $z = z_1$ ruotata però di un angolo $\theta(z_1)$. Esprimiamo anche F_4 in tale riferimento rotante ed abbiamo:

$$
\begin{aligned}
F_4 = {} & A(\xi^2+\eta^2)^2 + B(\xi^2+\eta^2)(\xi\eta'-\xi'\eta) + C(\xi'^2+\eta'^2)^2 + D(\xi'^2+\eta'^2)(\xi\eta'-\xi'\eta) + \\
& + E(\xi^2+\eta^2)(\xi'^2+\eta'^2) + F(\xi\eta'-\xi'\eta)^2
\end{aligned}
\tag{23}
$$

con

$$
A = \frac{e^2}{32}\left[\frac{B_z B_z''}{\sqrt{2emU^*}} - \frac{1}{4}\,\frac{e^2 B_z^4}{(2emU^*)^{3/2}}\right] \qquad B = \frac{e}{16}\left[B_z'' - e^2\,\frac{B_z^3}{2emU^*}\right]
$$

$$
C = -\frac{1}{8}\sqrt{2emU^*} \qquad D = -\frac{1}{4}\,e\,B_z \qquad E = -\frac{1}{16}\,\frac{e^2 B_z^2}{\sqrt{2emU^*}}
$$

$$
F = -\frac{1}{8}\,\frac{e^2 B_z^2}{\sqrt{2emU^*}} .
$$

Volendo studiare l'influsso di un diaframma sui termini di aberrazione individuiamo il generico raggio parassiale uscente dal punto P_o con condizioni ai limiti cioè mediante le coordinate di $P_o(x_o, y_o)$ e del punto $P_a(x_a, y_a)$ d'incontro col piano d'apertura della lente posto in $z = z_a$. Pertanto l'equazione della traiettoria al primo ordine passante per tali limiti è

$$
\xi = x_o g(z) + x_a h(z) \qquad \eta = y_o g(z) + y_a h(z) \tag{24}
$$

ove $g(z)$ ed $h(z)$ sono soluzioni delle (22) che soddisfano le condizioni

$$
g(z_o)=1 \qquad g(z_a)=0 \qquad h(z_o)=0 \qquad h(z_a)=1.
$$

Anche nelle (19) è preferibile introdurre x_a ed y_a al posto di σ_1 e τ_1 e sotto condizioni di continuità in pratica sempre verificate da W_4 si ha:

$$\Delta x_1 = -\frac{\partial W_4}{\partial \sigma_1} = -\frac{\partial W_4}{\partial F_o \xi'_1} = -\frac{\partial W_4}{F_o \partial x_a}\frac{\partial x_a}{\partial \xi'_1} = -\frac{\partial S_4}{\partial x_a}$$

(25)

$$\Delta y_1 = -\frac{\partial S_4}{\partial y_a}$$

con

(26) $$S_4 = -\frac{1}{h'_1 F_o} W_4 = -\frac{1}{h'_1 F_o}\int_{z_o}^{z_1} F_4(\xi, \eta, \xi', \eta', z)dz$$

e l'integrale va calcolato lungo la traiettoria rappresentata dalle (24). Nell'eseguire l'integrale (26) si nota che S_4 è funzione di x_o, y_o, x_a, y_a, ma non tutti i valori di tali parametri portano una variazione in S_4: difatti a causa della simmetria di rotazione il valore di W_4, e quindi quello di S_4, è determinato dalla distanza del raggio dall'asse e non dai singoli valori di ξ ed η . Le grandezze suscettibili di variare pos posono apparire solo in determinate combinazioni: se $\vec{r}_o$ individua il raggio nel piano oggetto e $\vec{r}_a$ nel piano del diaframma esse sono:

$$R = \vec{r}_o \cdot \vec{r}_o = x_o^2 + y_o^2 \qquad \mu = \vec{r}_a \cdot \vec{r}_a = x_a^2 + y_a^2 \qquad \lambda = \vec{r}_o \cdot \vec{r}_a = x_o x_a + y_o y_a$$

(27)

$$\sigma = |\vec{r}_o \wedge \vec{r}_a| = x_o y_a - y_o x_a.$$

Pertanto sostituendo nella (23) le (24) tenendo presenti le (27), la (26) ci fornisce

$$-S_4 = H\rho^2 + GR^2 + L\lambda^2 + MR\mu + NR\lambda + P\mu\lambda + QR\sigma + T\mu\sigma + N\lambda\sigma$$

con

$$H = -\frac{1}{h'_1 F_o}\int_{z_o}^{z_1}\left[Ah^4 + Ch'^4 + Eh^2h'^2\right]dz$$

$$G = -\frac{1}{h'_1 F_o}\int_{z_o}^{z_1}\left[Ag^4 + Cg'^4 + Eg^2g'^2\right]dz$$

$$L = -\frac{1}{h'_1 F_o}\int_{z_o}^{z_1}\left[4Ag^2h^2 + 4Cg'^2h'^2 + 4Eghg'h' - Fh_o'^2\right]dz$$

$$M = -\frac{1}{h_1' F_o} \int_{z_o}^{z_1} \left[2Ag^2h^2 + 2Cg'^2h'^2 + E(g^2h'^2 + h^2g'^2) + Fh_o'^2 \right] dz$$

(28)

$$N = -\frac{1}{h_1' F_o} \int_{z_o}^{z_1} \left[4Ag^3h + 4Cg'^3h' + 2Egg'(gh' + g'h) \right] dz$$

$$P = -\frac{1}{h_1' F_o} \int_{z_o}^{z_1} \left[4Ag^3h + 4Cg'h'^3 + 2Ehh'(gh' + g'h) \right] dz$$

$$Q = -\frac{h_o'}{h_1' F_o} \int_{z_o}^{z_1} (Bg^2 + Dg'^2) dz \; ; \quad T = -\frac{h_o'}{h_1' F_o} \int_{z_o}^{z_1} (Bh^2 + Dh'^2) dz$$

$$W = -\frac{h_o'}{h_1' F_o} \int_{z_o}^{z_1} (2Bgh + 2Dg'h') dz.$$

Specifichiamo la disposizione degli assi ξ, η nel piano dell'oggetto $z=z_o$ in modo che l'asse ξ passi per il punto P_o ed applicando le (25) otteniamo

(29)

$$\Delta x_1 = 4H\rho^3\cos\phi + (T\sin 2\phi + P\cos 2\phi + 2P)\rho^2 x_o + (2L\cos\phi + 2M\cos\phi + \\ + W\sin\phi)\rho x_o^2 + Wx_o^3.$$

$$\Delta y_1 = 4H\rho^3\sin\phi + (P\sin 2\phi - T\cos 2\phi + 2T)\rho^2 x_o + (2M\sin\phi + W\cos\phi)\cdot \\ \cdot \rho x_o^2 + Qx_o^3.$$

avendo introdotto nel piano del diaframma coordinate polari ρ e ϕ. Le (29) sono l'espressione esplicita della curva di aberrazione da noi cercata. Vediamo di studiare in breve le varie parti componenti. Immaginiamo in primo luogo che il punto P_o sia addirittura sull'asse di simmetria, allora nelle (29) scompaiono tutti i termini tranne il primo e in tali condizioni sarà:

$$\Delta x_1 = 4H\rho^3\cos\phi \qquad \Delta y_1 = 4H\rho^3\sin\phi$$

e se il diaframma è circolare, eliminando la ϕ, si vede che raggi emessi da una sorgente puntiforme sull'asse non si ricombinano in un sol punto ma danno luogo sul piano dell'immagine a una figura di dispersione a forma di cerchio di raggio

(30) $$R = 4Hr_a^3$$

e tale macchia è indipendente dall'oggetto e dipende solo dall'apertura del diaframma (r_a) oltre che dal campo magnetico. Tale aberrazione si chiama "aberrazione di sfericità" e compare nella (29) in aggiunta agli altri termini non nulli e quindi l'immagine di un oggetto puntiforme sarà almeno una figura di dispersione circolare centrata attorno all'immagine gaussiana. Per oggetti sull'asse o assai prossimi ad esso è più comodo sostituire all'apertura del diaframma, che compare nella (30), l'angolo massimo di apertura α_o del fascio di raggi uscenti da P_o: si ha allora:

$$R = \frac{4H}{h'^3_o} \alpha_o^3 = IC_s \alpha_o^3$$

avendo introdotto il coefficiente di aberrazione sferica C_s definito da:

$$C_s = \frac{4H}{I\, h'^3_o} = \frac{e}{16mU^*} \int_{z_o}^{z_1} \left[\left(\frac{3e}{8mU^*} B_z^4 + B'^2_z\right) u^4 - B_z^2 u^2 u'^2 \right] dz$$

ove u(z) è la radice della (22) che soddisfa le condizioni iniziali

$$u(z_o)=0 \qquad u'(z_o)=1$$

Consideriamo adesso il secondo termine delle (29) che rappresenta il "coma"; contrariamente però a quanto accade in ottica ordinaria si avrà accanto al coma isotropo un coma anisotropo, dovuto alla distorsione provocata dalla diversa rotazione dei vari raggi ad opera del campo magnetico. Tale secondo termine è:

$$\Delta x_1 = (T\sin 2\phi + P\cos 2\phi + 2P)\, \rho^2 x_o \qquad \Delta y_1 = (P\sin 2\phi - T\cos 2\phi + 2T)\rho^2 x_o.$$

Eliminando ϕ otteniamo

(31) $$(\Delta x_1 - 2P\rho^2 x_o)^2 + (\Delta y_1 - 2T\rho^2 x_o)^2 = (P^2+T^2)\rho^4 x_o^2$$

e se consideriamo nel piani di Gauss il punto di coordinate

$$\bar{\xi} = 2P\rho^2 x_o \qquad \bar{\eta} = 2T\rho^2 x_o$$

rispetto ad esso la (31) rappresenta un cerchio di raggio

$$r = \sqrt{P^2 + T^2}\;\rho^2 x_o$$

il cui centro sta su una retta formante con l'asse ξ un angolo δ tale che

$$\mathrm{tg}\,\delta = \frac{\bar{\eta}}{\bar{\xi}} = T/P.$$

Il cono dei raggi uscenti dal punto P_o a distanza x_o dall'asse z incontra il piano dell'immagine secondo cerchi di vario raggio a seconda del punto d'incontro con il diaframma: la figura inviluppo di tali cerchi ha la forma di una cometa giacchè tutti i cerchi suddetti sono tangenti a due rette simmetriche rispetto all'asse del coma, formanti tra di loro un angolo di 60^o.

Se T=0 sarà $\delta = 0$ e l'asse del coma è nella direzione dell'asse z cioè la coda della cometa è orientata perpendicolarmente all'asse di rivoluzione: è questo il coma isotropo o radiale. L'altro caso limite P=O comporta un angolo $\delta = \pi/2$ e in tal caso l'asse del coma è ortogonale all'asse di simmetria: è questo il coma sagittale. In genere si ha una combinazione dei due effetti e ciò comporta nell'immagine una confusione maggiore che in presenza del solo coma isotropo.

I termini successivi nelle (29) sono caratteristici dell'astigmatismo e della curvatura di campo. Eliminando la ϕ si ottiene la figura di dispersione sul piano di Gauss che è un'ellisse di semiassi

$$a = (L+2M+\sqrt{L^2+W^2})r_a x_o^2 \qquad b=(L+2M-\sqrt{L^2+W^2})r_a x_o^2 \tag{32}$$

il cui asse maggiore forma con l'asse ξ un angolo γ tale che

$$\mathrm{tg}\,2\gamma = -W/L.$$

Per trovare la lunghezza delle focali, il raggio del cerchio di minima confusione nonchè la curvatura del campo immagine bisogna investigare il comportamento dei raggi nello spazio al di fuori del piano di Gauss. Quando a=0 e b≠0 in assenza della rotazione γ abbiamo la focale tangenziale di lunghezza 2b e il raggio della sfera su cui si trova lo chiamiamo r_T; quando invece a≠0, b=0 si ha la focale sagittale 2a e il raggio della sfera è r_S. Abbiamo in altra sede dimostrato[9] che è

$$L + 2M + \sqrt{L^2+W^2} = \frac{h_1' I^2}{2\, r_T} \qquad 2b = -4\sqrt{L^2+W^2}\, x_o^2 r_a$$

$$L + 2M - \sqrt{L^2+W^2} = \frac{h_1' I^2}{2\, r_S} \qquad 2a = 4\sqrt{L^2+W^2}\, x_o^2 r_a.$$

Esiste anche una sfera intermedia tra le due di curvatura r_c tale che su di essa la figura di dispersione si trasforma nel cerchio di minima confusione ed è

$$L + 2M = \frac{u_1' \pm 2}{2\, r_c}$$

Consideriamo infine gli ultimi due termini delle (29)

$$(33) \qquad \Delta x_1 = N x_o^3 \qquad \Delta y_1 = Q x_o^3.$$

Essi costituiscono un'espressione indipendente da r_a: pertanto tale difetto ha la stessa importanza per tutti i raggi uscenti dallo stesso punto senza riguardare la loro inclinazione rispetto all'asse. In conseguenza di ciò tale aberrazione è diversa dalle altre giacchè non riguarda la finezza del dettaglio e non limita il potere risolutivo degli strumenti ottici ma sposta il punto immagine rispetto alla posizione assegnata dell'approssimazione gaussiana. Si tratta quindi della "distorsione" della immagine. Se Q=0 preso un punto a distanza x_o dall'asse si vede che quando $N > 0$ l'effetto delle (33), dato che l'immagine è rovesciata, è quello di diminuire l'ingrandimento all'allontanarsi del punto dall'asse (distorsione a barilotto). Se invece $N < 0$ si ha la distorsione a cuscinetto. La presenza del termine con Q mescola a tale effetto una deformazione trasversale.

RISULTATI ED USO PROGRAMMA.

La discussione precedente mostra che la conoscenza degli integrali (28) determina il contributo di tutte le aberrazioni geometriche sulla formazione delle immagini. Noi abbiamo pertanto redatto un programma per il calcolo mediante un calcolatore 1620 IBM di tali integrali per il campo di Glaser onde studiare il comportamento delle varie aberrazioni ed abbiamo potuto verificare che in genere per α_o non troppo grandi ($\sim 10^o$) il contributo dell'aberrazione sferica e di quella cromatica copre quello di tutte le altre aberrazioni almeno finchè non entri in concorrenza la diffrazione (il che si verifica per $\alpha \sim 10^{-3}$ rad.). Il programma è stato impostato in modo tale che basta modificare poche istruzioni per renderlo atto a calcolare i coefficienti di aberrazione di un qualsiasi sistema di lenti magnetiche a simmetria di rivoluzione.

Il nostro programma a schede per il calcolo dei coefficienti di aberrazione, a disposizione presso il Servizio Calcoli Numerici, richiede l'introduzione dei seguenti dati nell'ordine:

Energia cinetica dell'elettrone in MeV.

B_o in Wb/m^2

a in m.

z_o in m.

ascissa del diaframma z_a in m.

Si sono previste due entrate per i dati:

Switch 2 in On: entrata da nastro di carta

Switch 2 in Off: da macchina da scrivere.

Il programma calcola due soluzioni dell'equazione differenziale (22) mediante il metodo di Runge-Kutta (predisporre il tabulatore per 5 colonne) e ogni 5 passi se lo Switch 1 è in On stampa

$$z \qquad u(z) \qquad u'(z) \qquad v(z) \qquad v'(z)$$

se invece è in Off evita la scrittura risparmiando del tempo nel calcolo degli integrali di aberrazione che è quello che ci interessa. Invece di programmare gli integrali nella forma (28) li abbiamo prima modificati integrandoli per parti così da semplificare il procedimento di calcolo e assieme ad essi abbiamo programmato anche delle formule diverse dalle nostre dovute a Sturrock[10], la cui conoscenza è utile per una verifica dei risultati ottenuti. I risultati finali sono pertanto:

angolo di rotazione dell'immagine $\theta(z_1)$ in rad.

coefficiente di aberrazione cromatica C_c

coefficiente aberrazione sferica C_s

coefficienti di coma P/I T/I

coefficienti di distorsione N/I Q/I

(P/I) secondo sturrock

(N/I) secondo sturrock

coefficienti di astigmatismo L/I $2M/I$ W/I

(tutti rapportati cioè ad ingrandimento unitario).

Lo Switch 3 è stato poi impiegato per eseguire il calcolo di C_s e C_c soltanto: come abbiamo osservato precedentemente la loro conoscenza è in generale sufficiente per determinare l'andamento della curva di aberrazione. Per ottenere tutti i coefficienti di aberrazione bisogna perciò porre lo Switch 3 in Off; se è in On il programma calcola solo C_s e C_c.

RINGRAZIAMENTI.

Ringrazio il Dr. G. Sanna per avermi dato l'opportunità di studiare tale argomento e il Dr. A. Turrin i cui cortesi consigli e il costante incoraggiamento mi hanno permesso di portare a termine tale studio.

BIBLIOGRAFIA.

(1) - M. von Ardenne: Die Grenzen fur das Auflosungsvermogen des Elektronenmikroskops - Z. Physik 108, 338 (1937).

(2) - W. Glaser: Grundlagen der Elektronenoptik - . Springer Berlin

(3) - W. Glaser: Uber optische Abbildung durch mechanische Systeme und die Optik allgemeinen Medien - Ann. Physik 18, 557 (1933).

(4) - W. Glaser: Zur geometrischen elektronenoptik der axyalsymmetrischen elektronenmagnetischen Feldes - Z. Physik 81, 647 (1933).

(5) - Yourgrau e Mandelstam: Variational principles in dynamics and quantum theory - Pitman & Sons London.

(6) - O. Scherzer: Zur theorie der Elektronenoptischen Linsenfehler - Phys. 80, 193 (1932)

(7) - P. Grivet e A. Septier: Les lentilles quadrupolaires magnétiques report del CERN.

(8) - L. de Broglie: Optique électronique et corpuscolaire - Hermann et Cie, Paris.

(9) - P. Giupponi: Ottica elettronica: aberrazioni al terzo ordine (tesi di laurea).

(10) - P. Sturrock: Formules nouvelles pour les aberrations du troisième ordre des lentilles magnétiques - Compt. Rend. 233, 146 (1951).